

Лекция 9

Неявные конечно-разностные схемы

- это КРС, в которых значение искомой функции на **неизвестном** слое **нельзя** явно выразить через значения этой функции на **известных** слоях

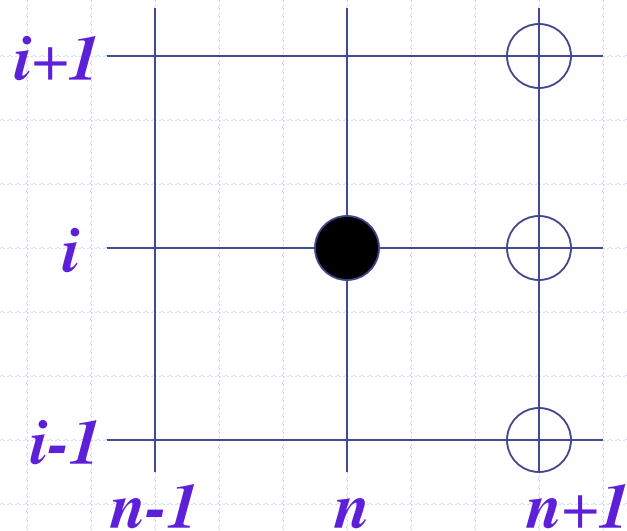
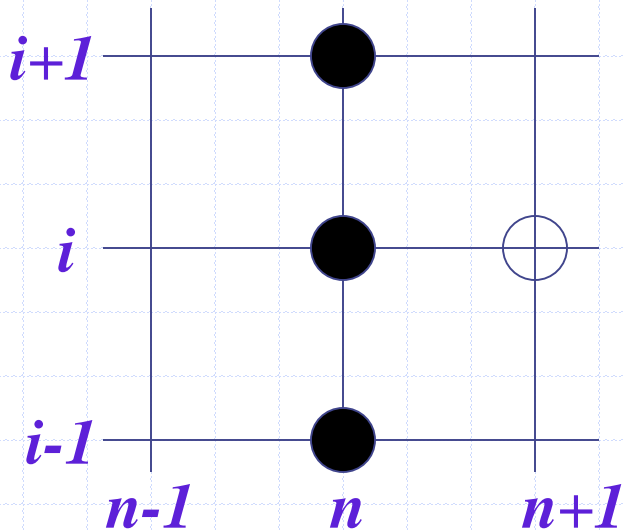
$$\frac{dT}{dt} + u \frac{dT}{dx} = a \frac{d^2T}{dx^2}$$

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = a \frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{\Delta x^2}$$

Явная КРС

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = a \frac{T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1}}{\Delta x^2}$$

Неявная КРС



Алгоритм расчета по неявной схеме (метод трехточечной прогонки)

1. Конечно-разностное уравнение приводится к виду:

$$A_i T_{i-1}^{n+1} + B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i+1}^{n+1} = D_i^n \Rightarrow A_i, B_i, C_i, D_i^n$$

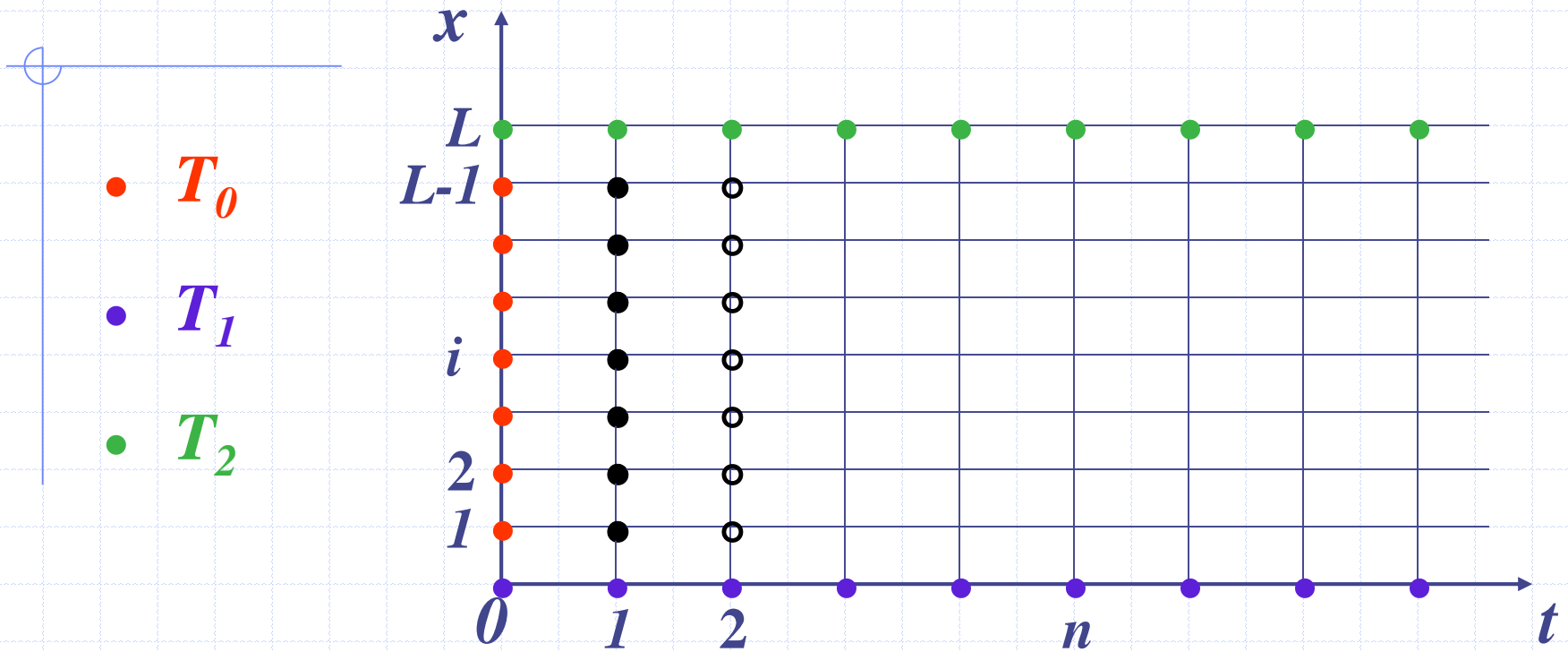
2. Прямая прогонка (вычисление прогоночных коэффициентов):

$$P_i^{n+1} = \frac{-C_i}{B_i + A_i P_{i-1}^{n+1}} \quad Q_i^{n+1} = \frac{D_i^n - A_i Q_{i-1}^{n+1}}{B_i + A_i P_{i-1}^{n+1}} \quad i=1,2, \dots, L-2, L-1$$

3. Обратная прогонка (определение искомой функции на неизвестных слоях):

$$T_i^{n+1} = P_i^{n+1} T_{i+1}^{n+1} + Q_i^{n+1} \quad i= L-1, L-2, \dots, 2, 1$$

Определение P_0^{n+1} и Q_0^{n+1}



$$i=0: T_0^{n+1} = P_0^{n+1} T_1^{n+1} + Q_0^{n+1} \Downarrow = T_1 = \text{const}$$

$$P_0^{n+1} = 0, \quad Q_0^{n+1} = T_1$$

Анализ на устойчивость

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = a \frac{T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1}}{\Delta x^2}$$

$$T_i^{n+1} + \frac{C}{2} (T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}) - d(T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1}) = T_i^n$$

$$V_{n+1} e^{i\theta} + \frac{C}{2} (V_{n+1} e^{i(i+1)\theta} - V_{n+1} e^{i(i-1)\theta}) - d(V_{n+1} e^{i(i+1)\theta} + V_{n+1} e^{i(i-1)\theta} - 2V_{n+1} e^{i\theta}) = V_n e^{i\theta}$$

$$V_{n+1} \left[1 + \frac{C}{2} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) - d(e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2) \right] = V_n$$

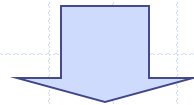
$$V_{n+1} \left[1 + \frac{C}{2} 2I \sin \theta - d(2 \cos \theta - 2) \right] = V_n$$

Условие устойчивости: $\left| \frac{V_{n+1}}{V_n} \right| \leq 1$ или $\left| \frac{V_n}{V_{n+1}} \right| \geq 1$

$$\left| \frac{V_n}{V_{n+1}} \right| = V_{n+1} [1 + 2d(1 - \cos \theta) + IC \sin \theta] \geq 1$$

$$1 + 4d(1 - \cos \theta) + 4d^2(1 - \cos \theta)^2 + C^2 \sin^2 \theta \geq 1$$

Это условие выполняется всегда при любых C и d



Неявная КРС является безусловно устойчивой

Преимущества и недостатки явных и неявных КРС

	Преимущества	Недостатки
Явные схемы	Имеют простой алгоритм расчета	Необходим анализ на устойчивость
Неявные схемы	Всегда абсолютно устойчивы	Более сложный алгоритм расчета

Вопросы:

- 1. Какие КРС называются явными?**
- 2. Какие КРС называются неявными?**
- 3. Из каких этапов состоит метод трехточечной прогонки?**
- 4. В чем заключается преимущество явных схем, а в чем - неявных?**